

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **II**, 8.

---

OVERFLADESPÆNDINGENS  
INDFLYDELSE VED UDSTRØMNING AF  
EN VÆDSKE I STRAALEFORM

AF

JUL. HARTMANN



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL  
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1919



## INDLEDNING

---

**E**<sup>N</sup> Indflydelse af Overfladespændingen paa Udstrømningen af en Vædske i Straaleform har længe været kendt. Men den Maade, hvorpaa Spændingen gør sig gældende, har man ofte i høj Grad misforstaaet. Naar der af et og samme Straalehul ved samme Trykhøjde pr. Sek. udstrømmer et større Volumen af en Vædske med en mindre end af en med større Overfladespænding, har man saaledes villet forklare dette ved, at Overfladespændingen i sidste Tilfælde snører Straalen mere sammen og altsaa forøger Kontraktionen. Man finder f. Eks. denne Forklaring i J. JAMINS Lærebog »Cours de Physique« Bind I. Maaske er den herfra eller fra J. Jamins Kilde gaaet over i andre Lærebøger, hvor den ogsaa optræder. Jeg gengiver Jamins Fremstilling:

»GIRARD<sup>1</sup> avait déjà constaté que l'alcool coule plus rapidement que l'eau à travers des orifices percés en mince paroi: la section contractée de la veine doit donc être plus grande pour l'alcool que pour l'eau, et c'est en particulier ce qui résulte de mesures directes de M. ISARN<sup>2</sup>. Il suffit, d'après ce dernier savant, de vaporiser de l'alcool ou de

<sup>1</sup> GIRARD, Mémoires de l'Académie, t. I. 1816.

<sup>2</sup> ISARN, Journal de Physique, 1<sup>re</sup> série, t. IV, p. 167; 1875.

l'éther à peu de distance d'un orifice par lequel de l'eau s'écoule, pour que, le liquide à faible tension superficielle se dissolvant dans l'eau, la dépense de l'orifice augmente dans une proportion appréciable.«

Den, der først har givet den i Følge de nedenfor anførte Forsøg rigtige Forklaring af Overfladespændingens Indflydelse, er vistnok C. CHRISTIANSEN<sup>1</sup>. Hvis Overfladespændingen er  $C$ , maa der i en cylindrisk Straale med Radius  $r$  efter Christiansen virke et Tryk  $C/r$ , som modsætter sig Udstrømningen, og som bliver at trække fra det Tryk, under hvilket Vædsken strømmer ud, naar man paa Grundlag af TORRICELLIS Formel vil beregne den udstrømmende Mængde. Christiansen prøvede paa at gennemføre de Forsøg, som jeg nu har tilendebragt, men Forsøget mislykkedes og maatte mislykkes paa Grund af Ufuldkommenheden af de Apparater, hvoraf han betjente sig. Jeg genoptog Forsøgene og gjorde det, især fordi de stillede en simpel Metode til Bestemmelse af Overfladespænding i Udsigt, og fordi det paa Forhaand vel ikke kunde betragtes som aldeles givet, at Christiansens Anskuelse om Indflydelsen holdt Stik. Resultatet af mit Arbejde blev en meget fuldkommen Bekræftelse paa Christiansens Antagelse, idet en Bestemmelse paa Grundlag af denne af Overfladespændingen for Kvægsølv og Vand førte til Værdier for disse Konstanter, praktisk set sammenfaldende med de bedste hidtil udførte Bestemmelser. Efter at dette var fastslaaet, har jeg paa Grundlag af de indvundne Erfaringer uddannet en ny Maalemetode til Overfladespændingens Bestemmelse. Beretningen om dette Arbejde er fremkommen andetsteds.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> C. CHRISTIANSEN, Ann. d. Phys. 5, 436, 1901.

<sup>2</sup> JUL. HARTMANN, Ingeniøren Nr. 53—55, 1919.

### Forsøgsapparat.

Dette, der er vist i Fig. 1 a—c bestod ved mine Forsøg af en cylindrisk udboret Støbejernskumme med en indvendig-Diameter paa

14,845 cm og en Dybde paa ca. 9,5 cm. Paa modsatte

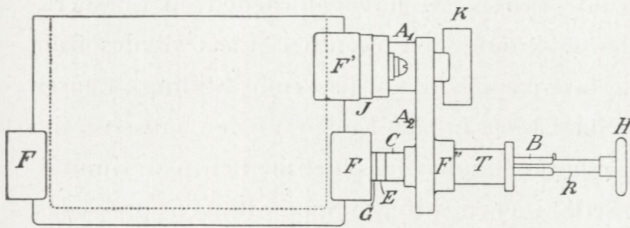


Fig. 1 a.

Sider hav-

de Beholderen udvendig to »Forstærkninger« *F* med plane Ydersider. Gennem

hver af disse og Cylinderens Væg var der ført to Boringer Fig. 1 c. Den ene af disse

var i hver Forstærkning bestemt til at optage et planparallelt Vindu *V*. I den anden Boring i den ene Forstærkning skruedes det straalledende Element *P* (Hulpladen). Den tilsvarende Boring i den anden Forstærkning benyttedes ikke og var derfor lukket med en Prop.

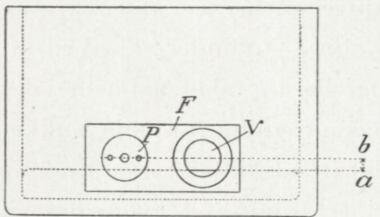


Fig. 1 b

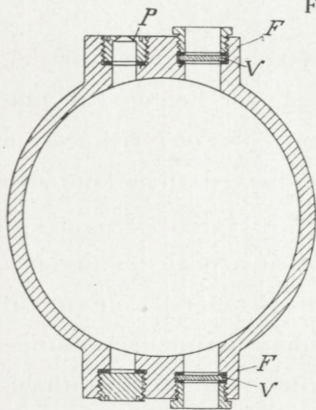


Fig. 1 c.

Ved Forsøgene skulde man saa pludselig som muligt

kunne aabne og lukke for Straalehullet. Lukkemekanismen er fremstillet i Fig. 1 a. Den var bygget ud fra den plane Forside af Forstærkningen *F'*. Fra *F'* var den isoleret ved Fiberskiven *I*. Paa denne var den korte, vandrette

Arm  $A_1$  fastgjort. Paa  $A_1$  kunde atter den lodrette Arm  $A_2$  fastspændes ved Fløjskrue  $K$ , saaledes at Armen tillige med alt, hvad der sad paa den, let kunde fjærnes, naar Hulpladen skulde skiftes.  $A_2$  havde forneden en Forstærkning  $F''$ . I denne kunde den egentlige Laas skydes frem og tilbage og fastspændes i en passende Stilling. Laasen bestod af en Staalskive  $E$  paa Enden af den massive Cylinder  $C$ .  $E$  var langs Randen forsynet med en plan Gummiring, der passede i et neddrejet Spor. Ringen pressedes, naar Laasen var lukket, ind mod den plane Forside af Straalehulpladen. Trykket udøvedes herved af en kraftig Fjeder monteret indeni den hule Cylinder  $T$ . Ved at trække Stangen  $R$  med Haandgrebet  $H$  udad aabnedes der for Vædsken. Ved en Bajonetlaasindretning  $B$  kunde Lukkemekanismen efter at være trukket ud stilles i Ro. Endelig kunde den lukkes ved en kort Drejning af  $H$ , som det vil forstaas af Figuren.

Naar Laasen isoleredes fra Vædskebeholderen, var det, fordi der ved andre Forsøg end dem, der her er Tale om, maatte være Mulighed for at sende en elektrisk Strøm gennem Straalen. Skiven  $E$  skulde herved tjene som den ene Elektrode.

Med det beskrevne Forsøgsapparat arbejdedes der paa følgende Maade. I Kummen hældtes der først  $250 \text{ cm}^3$  af den Vædske, med hvilken Udstrømningsforsøget skulde udføres. Vædskens Overflade dannede en Bund i Kummen, og denne Bunds Dybde under Centrum af Straalehullet udmaalt ved et Kathetometer med en Nøjagtighed af ca.  $0,05 \text{ mm}$ . Herefter hældtes der yderligere f. Eks.  $1250 \text{ cm}^3$  Vædske i Kummen. Idet dennes indvendige Diameter var udmaalt — ligeledes ved Kathetometer — kunde Vædskeoverfladens Højde over Straalehullets Centrum beregnes.

Udstrømningsforsøget bestod nu i, at man ved Stoppeur iagttog Tiden for Udstrømningen af en Række lige store Portioner — paa  $50,2 \text{ cm}^3$  — af Vædsken. Af Tidsiagttagelserne og Portionernes Volumen beregnedes de pr. Sek. udstrømmende Rumfang  $V$ . Tallene for disse opførtes i en Tabel sammen med de tilsvarende gennemsnitlige Trykhøjder. Disse var beregnede en Gang for alle under den Forudsætning, at hver af de aftappede Portioner var  $50,2 \text{ cm}^3$  og under Forudsætning af, at Centrum af Straalehullet laa  $0,185 \text{ cm}$  over Vædskebunden. Var den sidste Højde en anden, rettedes der for »Nulpunktsfejlen«. Derimod rettedes der ikke for de smaa svingende Afvigelser fra Værdien  $50,2 \text{ cm}^3$  af de aftappede Portioner. Gennemsnitshøjderne beregnedes som det simple Middeltal af Højderne for Overfladen før og efter Udstrømningen af den paagældende Vædskeportion. Herved begaas en Fejl givet ved Udtrykket

$$\Delta h = \frac{h_1 + h_2 - 2\sqrt{h_1 h_2}}{4},$$

naar  $h_1$  resp.  $h_2$  er den effektive Begyndelses- resp. Slutningshøjde. Denne Fejl kunde praktisk set altid betragtes som forsvindende. Tabellen afbildedes endelig i en  $V^2$ - $h$ -Kurve, d. v. s. en Kurve, der til Abscisse har Trykhøjden  $h$ , til Ordinat Kvadratet  $V^2$  paa det pr. Sekund udstrømmende Vædskevolumen. Betegnes den til Overfladespændingens Modtryk svarende Vædskehøjde ved  $h_0$ , er den ved Torricellis Lov bestemte Værdi for  $V$

$$V = \frac{\pi}{4} \alpha^2 d^2 \cdot \sqrt{2g(h - h_0)},$$

hvor  $\alpha$  er Udstrømnings- eller Kontraktionskoefficienten (den effektive), og  $d$  Straalehullets Diameter. Ligningen for  $V^2$ - $h$ -Kurven skulde derfor være

$$V^2 = \left(\frac{\pi}{4} \kappa^2 d^2\right)^2 \cdot 2g \cdot (h - h_0).$$

Hvis altsaa  $\kappa$  er konstant, skulde  $V^2$ - $h$ -Kurven vise sig at være en ret Linie, der af  $h$ -Aksen afskærer Stykket  $h_0$ , hvoraf Overfladespændingen  $C$  ifølge Christiansen skal kunne beregnes ved Udtrykket

$$h_{0,15} = \frac{2C}{d' \rho g},$$

naar  $d'$  betegner Straalens Diameter og  $\rho$  Vædskens Vægtfylde.

## A. Forsøg med Kvægsølv.

### Ændringer i Straalens Udseende under Udstrømningen.

Efterhaanden som Overfladen synker i Reservoirret under Udstrømningsforsøget, bøjes Straalen mere og mere nedad af Tyngden. Samtidig bliver dens Overflade — saa længe Trykhøjden endnu ligger over en vis Grænse — mere og mere glat og regelmæssig. Henimod Slutningen af Udstrømningsforsøget antager Straalen et Udseende, der i væsentlig Grad afhænger af Straalehullets Diameter. Ved videre Boringer, for Eks. Boringer paa 2 mm og derover, vedbliver Straalen at være glat og danner, lige til den saa at sige har Hastigheden Nul, en sammenhængende, flere cm lang Straale. Fig. 2 a—e gengiver en Række Øjeblikksfotografier af en saadan Straale, fremstillet ved et Straalehul i Karton paa 1,96 mm. Umiddelbart før Udstrømningen ophører, bliver ret pludselig den lange Straale instabil, og Udstrømningen finder nu Sted paa en ejendommelig pulserende Maade, hvorved Straalen, der nu er ganske kort, antager et flimrende Udseende. Ved noget snævrere Boringer — f. Eks. en Boring paa 1,2 mm — indtræder Instabiliteten ved en større Trykhøjde. Ved Boringer af en Diameter



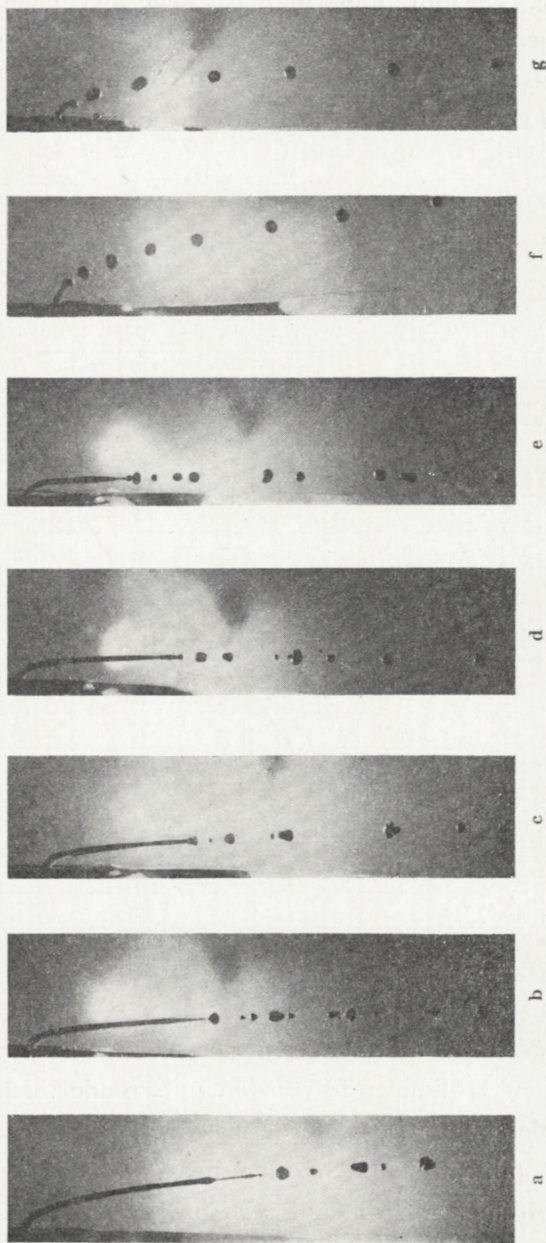


Fig. 2.

omkring 1,4 mm kan man iagttage det ejendommelige Fænomen, at Straalen slaar over fra den glatte Form til den pulserende og derefter atter til den glatte. Fig. 2 f og g viser to Øjebliksbilleder af en »Straale« paa 1,432 mm ved

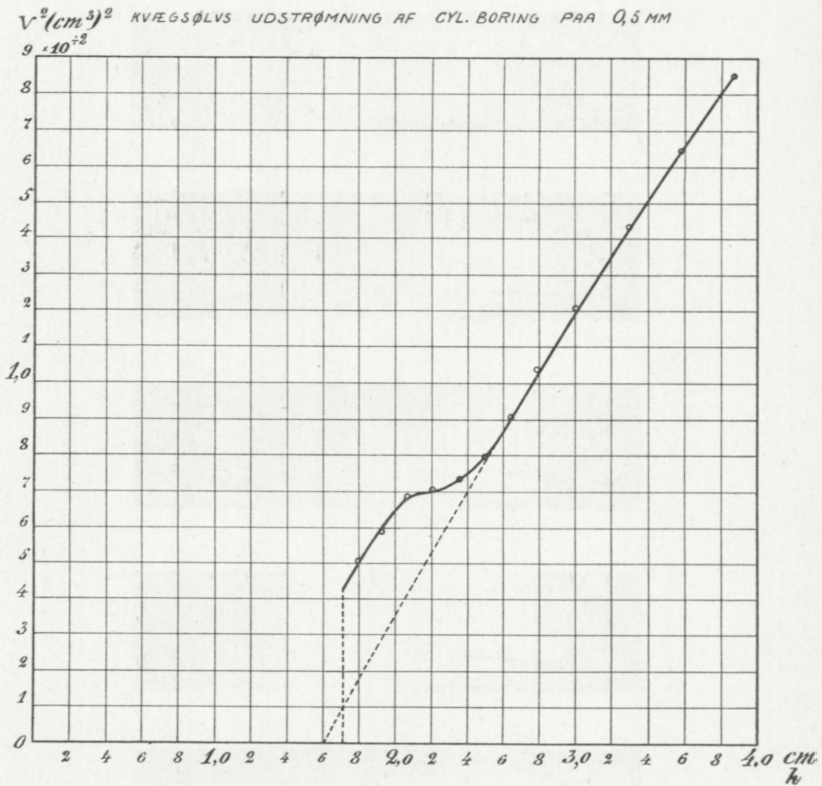


Fig. 3.

pulserende Udstrømning. Ved meget snævre Boringer paa Brøkdeler af en Millimeter bliver den pulserende Udstrømningsform yderst udpræget, idet Kvægsølvet ender med i Draabeform at pible frem af Straalehullet.

Det fremgaar af de udførte Forsøg, at  $V^2$ - $h$ -Kurven ved cylindriske Boringer er retliniet ned til de mindste Tryk.

Overgangen fra glat til pulserende Straale ændrer ikke Retningen væsentligt; men bliver Udstrømningen »pibende«, viser det sig yderst tydeligt i  $V^2-h$ -Kurven, saaledes som det ses af Fig. 3. Da det gennemsnitlige fra Overfladespændingen hidrørende Tryk inde i de frempibende Kvægsølvdraaber er mindre end det hydrostatiske Tryk hidrørende fra Overfladen af en Kvægsølvcylinder af Boringens Diameter, strømmer der mere Kvægsølv ud, end der vilde ved en Straale. Derfor krummer  $V^2-h$ -Kurven, naar Draabedannelsen begynder, først med Hulheden opad for senere at falde jævnt af som Følge af det formindskede Udstrømningstryk.

### Udstrømningens Ophør.

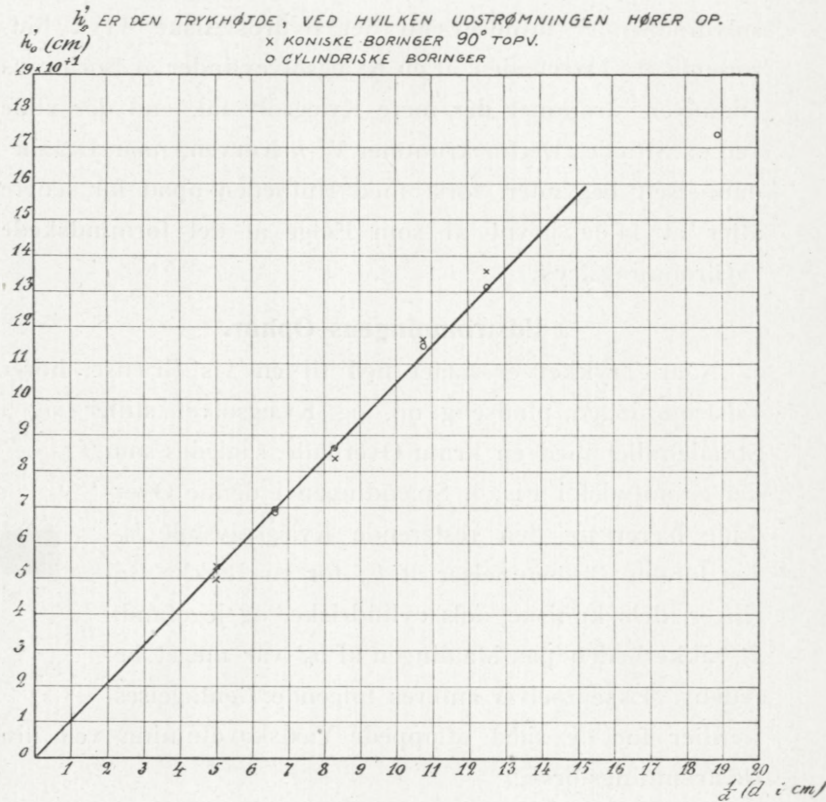
Naar Trykket er naaet ned til en vis Grænse, hører Udstrømningen pludselig op, og Kvægsølvet stiller sig i Straalehullet med en krum Overflade, saaledes som det er antydnet i Fig. 4. Spændingen i denne Overflade bærer nu den resterende Kvægsølv søjle  $h_0'$ . Jeg foretog Bestemmelser af  $h_0'$  for en Række Boringer, dels koniske dels cylindriske, og jeg fandt, at Sikkerheden paa Maalingen af  $h_0'$  var meget betydelig. Eksempelvis anføres følgende Gentagelsesværdier for de sidst aftappede Vædskevolumina ved fire Udstrømningsforsøg.



Fig. 4.

Nr.	0,80. 90°	0,93. 90°	2,0. 90°	1,5 cyl.
1	9,2 cm <sup>3</sup>	43,5 cm <sup>3</sup>	1,7 cm <sup>3</sup>	7,8 cm <sup>3</sup>
2	8,5 -	40,1 -	1,7 -	6,7 -
3	8,2 -	42,5 -	1,9 -	6,7 -
4	8,8 -	45,0 -	1,6 -	....
5	....	....	2,1 -	....
	8,7 cm <sup>3</sup>	42,8 cm <sup>3</sup>	1,8 cm <sup>3</sup>	7,1 cm <sup>3</sup>
	$\Delta = 0,5 \text{ cm}^3$	$\Delta = 2,7 \text{ cm}^3$	$\Delta = 0,2 \text{ cm}^3$	$\Delta = 0,7 \text{ cm}^3$

Gentagelsesværdierne fandtes ved efter Afmaalingen af Restvoluminet atter at hælde dette tilbage i Beholderen og igen bestemme det Rumfang, som løb ud. Usikkerheden er, som det synes, abnorm stor i andet Tilfælde, og her



ligger den dog under  $3 \text{ cm}^3$ . Det vil sige, den Trykhøjde, ved hvilken Udstrømningen ophører, er ved een Iagttagelse bestemt med en Sikkerhed af ca.  $0,16 \text{ mm}$ . I de andre Tilfælde er Sikkerheden væsentlig større.

Dersom Vædskeoverfladen i Boringen Fig. 4 er kugleformet og har Krumningsradius  $r'$ , skal  $r'$  være givet ved

$$\frac{2C}{r} = h_0 \cdot 13,55 \cdot 981,$$

idet  $C$  betegner Kvægsølvets Overfladespænding.

Hvis det tør antages, at  $r'$  er proportional med Boringens Radius  $r$ , saa at  $r'$  kan sættes lig  $k \cdot r$ , skal man ved at afbilde Variationen af  $h_0'$  med  $1/r$  eller  $1/d$ , hvor  $r$  og  $d$  er Radius resp. Diameteren i Straalehullet, finde en ret Linie. I Fig. 5 er alle under Arbejdet iagttagne Værdier for  $h_0'$  indtegnede i deres Afhængighed af  $1/d$ . Naar man ser bort fra Værdien svarende til Boringen paa 0,53 mm, der ogsaa ved de ovenfor betragtede Udstrømningsforhold udviste Anomalier, fordeler alle Forsøgspunkter sig med stor Regelmæssighed om en ret Linie gennem Begyndelsespunktet. Af den rette Linie finder man for Konstanten  $k$  Værdien 1,496, idet der for  $C$  er benyttet Værdien 520 dyn/cm. Kvægsølvstiller sig altsaa ind med en Krumningsradius, der med god Tilnærmelse er lig 1,50 Gange Boringens Radius. Og Krumningsradius er ganske uafhængig af, om Boringens Profiler er cylindrisk eller konisk.

### Den extrapolerede Nulhøjde og dens Sammenhæng med Overfladespændingen.

Efter den Christiansenske Antagelse skal, som anført, det Stykke  $h_0$  — den extrapolerede Nulhøjde —, som den forlængede  $V^2$ - $h$ -Kurve afskærer af Abscisseaksen, være bestemt ved

$$\rho g h_0 = \frac{2C}{d},$$

hvorved det erindres, at  $d'$  betegner Straalens Diameter. Det Resultat, mine Forsøg førte til, var i Korthed følgende. Ved cylindriske Boringer er  $V^2$ - $h$ -Kurven retliniet. Forlænges den retliniet ned til Abscisseaksen, afskærer den et

Stykke ( $h_0$ ), Fig. 6, der, indsat i Formlen ovenfor, altid giver samme Værdi for  $C$ , naar man for  $d'$  sætter Straalehullets Diameter  $d$  — svarende til, at den virkelige Kontraktion ved cylindriske Boringer konstant er Nul. Ved

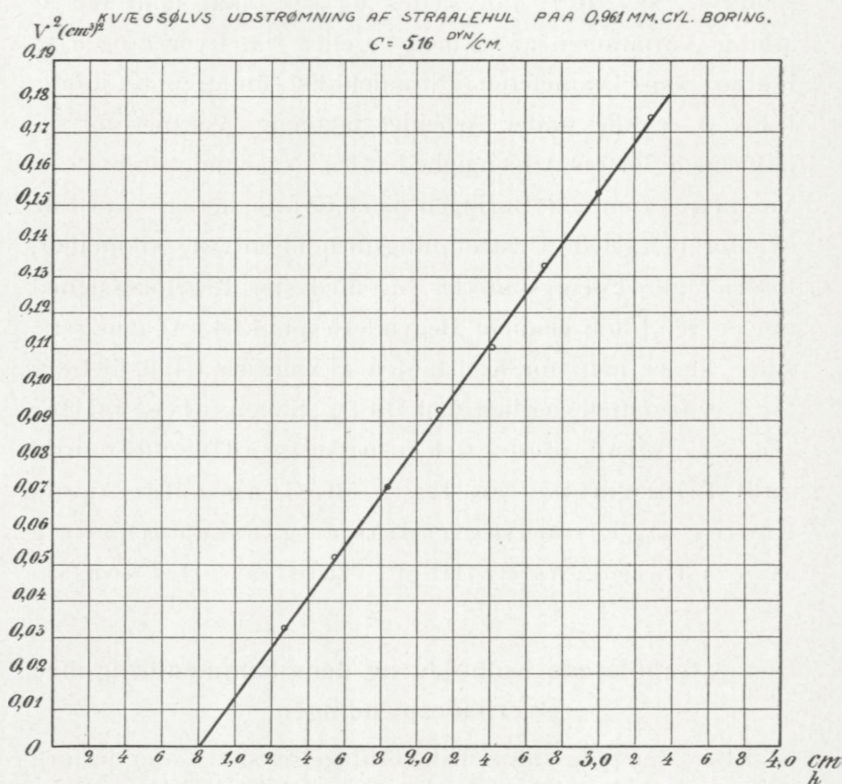


Fig. 6.

koniske Boringer er  $V^2$ - $h$ -Kurven krum, Fig. 7. Fortsættes den ned til Abscisseaksen ved Hjælp af en bøjelig Lineal, der lægges an langs den experimentalt bestemte Del, og indsætter man i Formlen ovenfor den afskaarne Del for  $h_0$ , samt sætter man for  $d'$  ligesom ved de cylindriske Boringer Straalehullets Diameter — svarende til, at den virkelige Kontraktion ved aftagende Hastighed tenderer mod

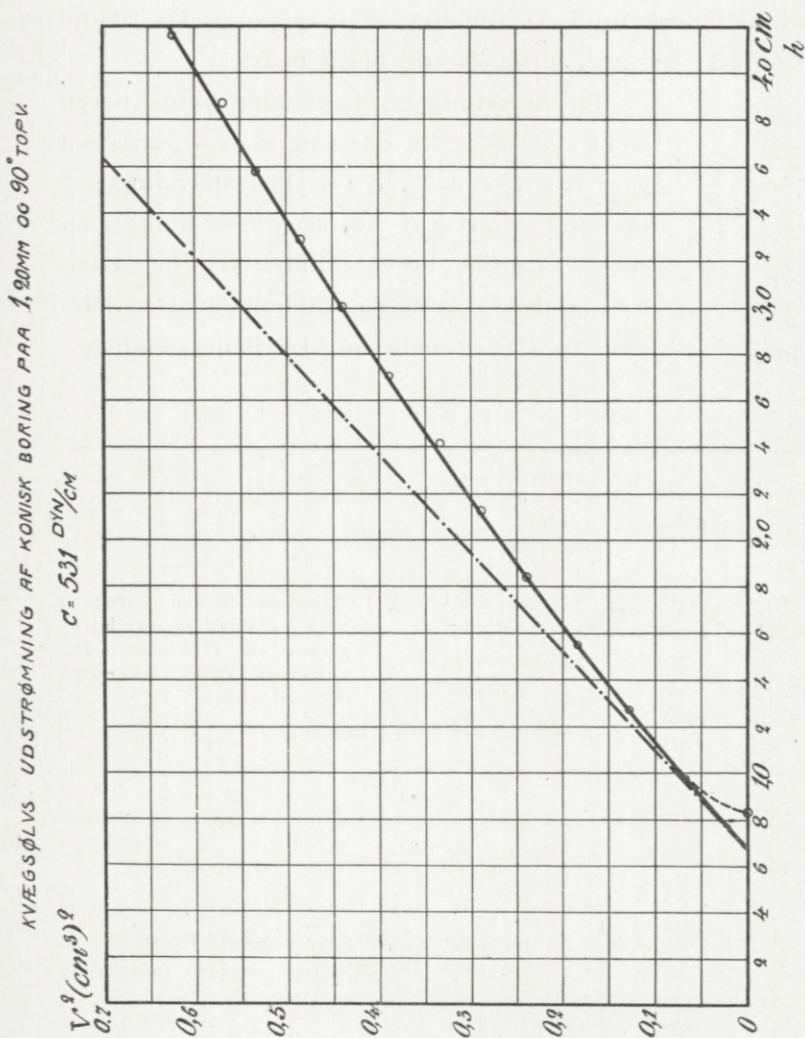


Fig. 7.

Nul<sup>1</sup> —, faar man atter for  $C$  en konstant Værdi og i Hovedsagen den samme, der blev fundet ved de cylindriske Boringer. Den fælles  $C$ -Værdi falder herved meget nær

<sup>1</sup> Angivelserne om Kontraktionen gengiver Resultater af en Række Undersøgelser, der vil blive beskrevet andetsteds.

sammen med de Bestemmelser af Kvægsølvs Overfladespænding, der maa anses for de hidtil bedste.

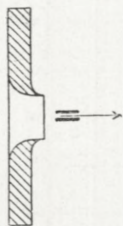


Fig. 7.

Til Belysning af, hvor nøje  $V^2$ - $h$ -Kurven baade ved Straaler uden og med Kontraktion gaar igennem det ved Overfladespændingen  $C$  bestemte Punkt af Abscisseaksen anføres en Række Værdier for  $C$ , fundne ved det ovenfor antydede Forsøg paa Uddannelse af en Metode til Bestemmelse af Overfladespænding.

Tabel I.

Nr.	Hul-diameter	Længde af Boringens cylindriske Del	$C$	Anm.
5	0,799 mm	2,0 mm	506 dyn/cm	Cylindriske Huller borede i Staal. $C$ -Værdierne er korrigerede for Tryktabet i Boringernes cylindriske Del. (Se nedenfor).
4	0,961 -	1,2 -	516 —	
6	1,218 -	3,0 -	527 —	
9 og 10	1,507 -	2,5 -	507 —	

Middeltal 514 dyn/cm ved ca. 15°

Tabel II.

Nr.	Hul-diameter	Kartonens Tykkelse	$C$	Anm.
85	1,228 mm	0,25 mm	530 dyn/cm	Huller pressede i Karton.
91 A og B	1,923 -	0,13 -	547 —	Straalen udviser foranderlig Kontraktion.
93	1,228 -	0,25 -	518 —	
94	0,965 -	0,13 -	532 —	
95	0,952 -	0,13 -	540 —	
96	1,380 -	0,13 -	522 —	

Middeltal 536 dyn/cm ved ca. 16°

Som det fremgaar af Forsøgsnumrene, gengiver Tallene i første Tabel Resultater fra nogle af de allerførste Bestemmelser. Disse Bestemmelser maa betragtes som orienterende,



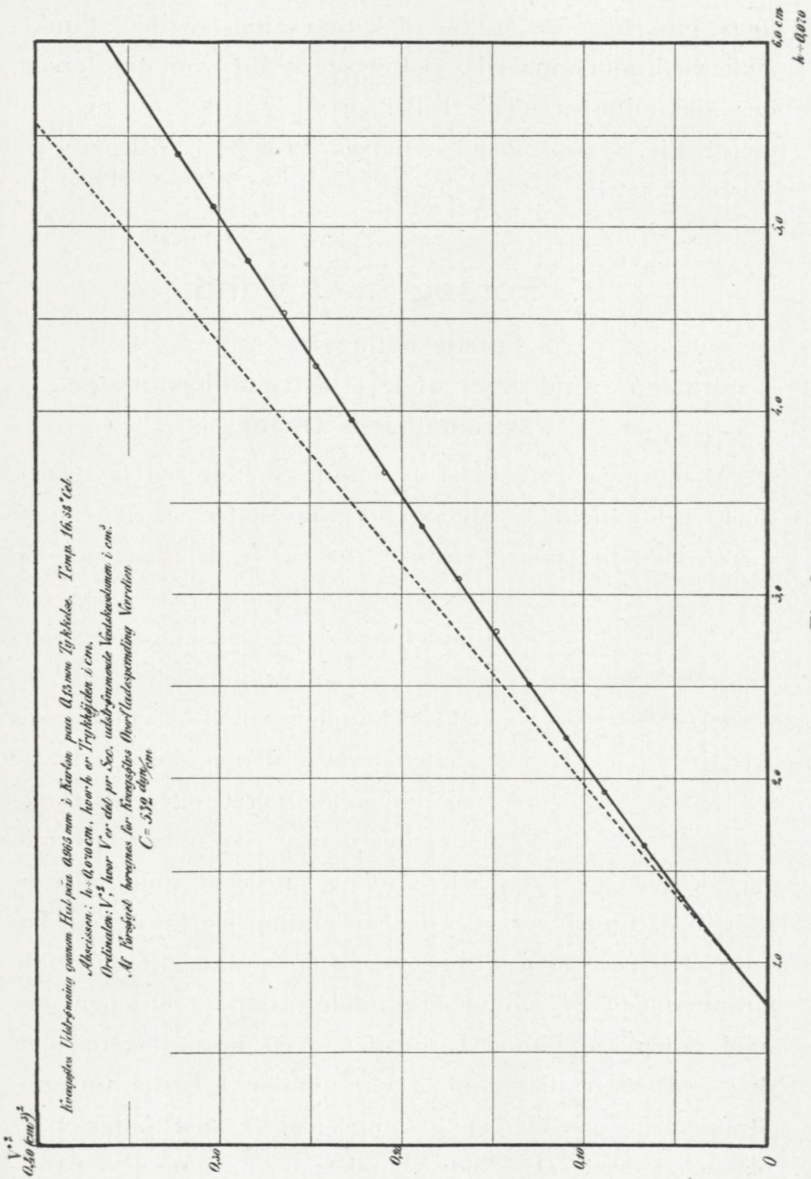


Fig. 9.

anden Tabel derimod indeholder de sidste og endelige Bestemmelser i den hele Forsøgsrække. Den sande Værdi for Overfladespændingen ved 20° af en ny Kvægsølvoverflade synes at

ligge omkring 540 dyn/cm. Til Belysning af den Punkt-sikkerhed, som opnaaedes ved de senere Udstrømningsforsøg, der alle udførtes med Huller pressede i Karton og med den i Fig. 8 viste Profil gengives i Fig. 9  $V^2$ - $h$ -Kurve fra Forsøg Nr. 94.

## B. Forsøg med Vand.

### Forsøgsbetingelser.

#### **Straalens Ændringer under Udstrømningsforsøget. Udstrømningens Ophør.**

At udføre et entydigt Udstrømningsforsøg ved lavt Tryk med et Straalehul i Metal eller Glas lader sig ikke gøre med Vand eller nogen Vædske, der væder det paagældende

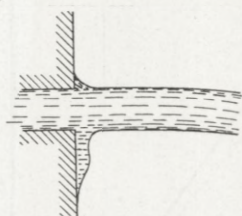


Fig. 10.

Materiale. Der samler sig straks om Straalehullet en Vædske-masse, saaledes som det er antydnet i Fig. 10. Ved Trykhøjder paa 3—4 cm presses Straalen frem af denne Masse og staar med en veldefineret og glat Overflade, men den pr. Sek. udstømmende

Vædskemængde kan variere mange Procent som Følge af tilfældige Ændringer i Vædskeansamlingens Form, og den kan være flere Procent større end den Mængde, der vilde strømme ud ved samme Trykhøjde, saafremt Straalen stod med skarp Kant imod Hulpladen. Ved noget lavere, men dog ved et relativt højt Tryk ophører Udstrømningen i Straaleform ganske, idet Vandet driver ned langs Hulpladens lodrette Overflade. Vandets Vedhængning ved Hulpladen umuliggør derved praktisk set Optagelsen af den nederste Del af en normal  $V^2$ - $h$ -Kurve og som Følge heraf ogsaa Extrapolation til Nulhøjden  $h_0$ .

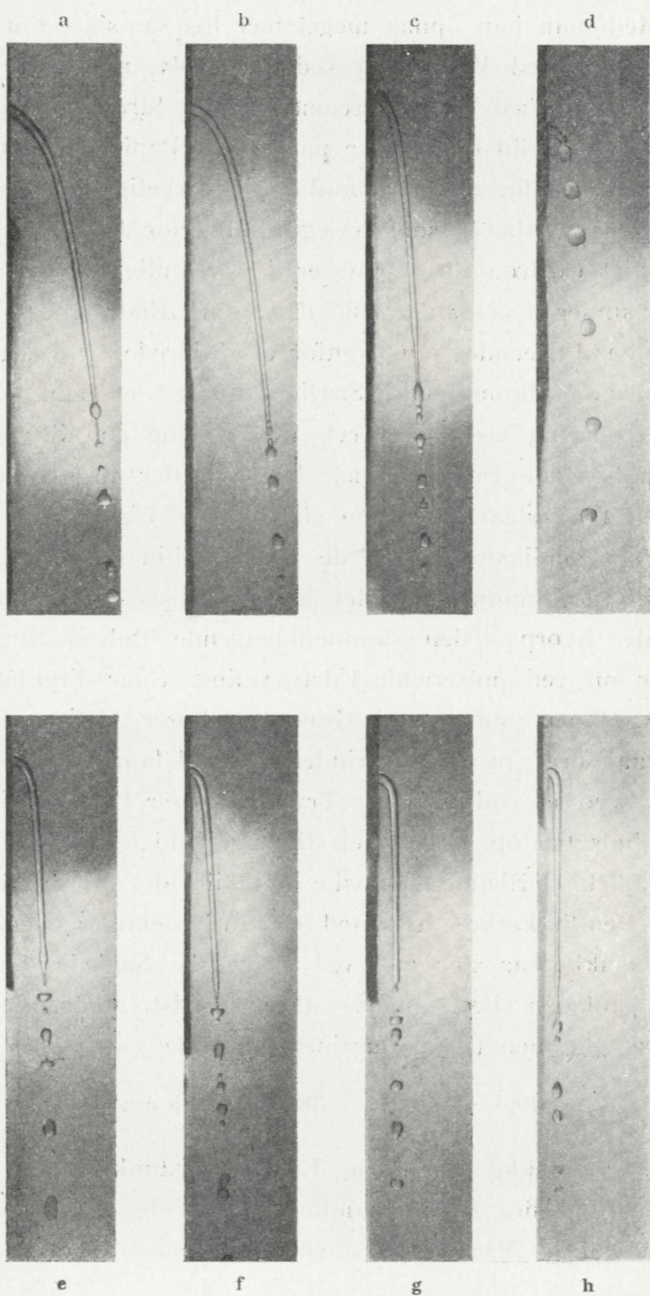


Fig. 11.

Men man kan opnaa meget nær lige saa sikre Forsøgsbetingelser ved Vand som ved Kvægsølv, naar man ved den første Vædske til Fremstilling af Straalehulspladen benytter Parafin eller bedre parafineret Papir eller Karton. Overfor Parafin opfører Vand sig i Virkeligheden ganske paa samme Maade som Kvægsølv overfor Jærn. Et fuldstændigt Udstrømningsforsøg er derfor muligt, og man iagttaget under et saadant ganske de samme Ændringer i Vandstraalens Udseende som ovenfor er skildrede for Kvægsølvsstraalens Vedkommende. Særlig udpræget er den pludselige Overgang ved lave Tryk fra en lang glat Straale til en pulserende Udstrømning, der saa atter ved et endnu lavere Tryk slaar om til en glat Straale. Fig. 11 a—h gengiver i Øjebliksfotografier de tre paa hinanden følgende Faser i Udstrømningen. Ret karakteristisk er den bratte Maade, hvorpaa den sammenhængende Del af Straalen hører op ved pulserende Udstrømning. Naar Trykhøjden er naaet ned under en vis Grænse, ophører Udstrømningen i Straaleform, og Vandet rinder nu ned langs Hulpladens Væg. Ved et endnu lavere Tryk  $h_0'$  hører Udstrømningen ret pludseligt op, og Vandet stiller sig ind i Boringen med en kuppet Overflade — ganske som Tilfældet var ved Kvægsølv. Den Sikkerhed, hvormed  $h_0'$  kan bestemmes ved Vand, er dog ikke saa stor som ved Kvægsølv. Saaledes fandtes ved gentagen Bestemmelse af det sidst udstrømmende Vædskevolumen (Restvoluminet) følgende Værdier

$$29,4 — 24,4 — 38,4 — 40,8 \text{ cm}^3,$$

i hvilken Række en ensidig Ændring vistnok gør sig gældende. Ved fire Forsøg fandtes for  $h_0'$  de i hosstaaende Tabel anførte Værdier.

Forsøg	Boringens Radius $r$	$h_0'$	$r'$	$r'/r$
Nr. 61	0,735 mm	1,318 cm	1,137 mm	1,55
- 74	0,885 -	1,051 -	1,427 -	1,61
- 63	0,901 -	0,945 -	1,590 -	1,76
- 73	1,091 -	0,713 -	2,064 -	1,89

I Tabellen betegner  $r'$  Radius i Kuppen beregnet af Udtrykket

$$\frac{2C}{r'} = h_0'g,$$

hvor  $C$  — Vandets Overfladespænding — er sat lig 73,6 dyn/cm.

Forholdet mellem  $r'$  og Straalehullets Radius  $r$  vokser, som det ses, med Straalehullets Radius. Jo større Hullet er, desto fladere synes Kuppen altsaa at blive. Forsøg Nr. 61 og 63 blev udført med cylindriske Boringer i Parafinpropper, Nr. 73 og 74 med Huller pressede i parafineret Papir.

### Nulhøjden og Overfladespændingen.

Resultatet af min Prøve af Christiansens Antagelse var for Vand ganske det samme som for Kvægsølv. Den extrapolerede Nulhøjde  $h_0$  bestemmer Vandets Overfladespænding, naar den indsættes i det ovenfor anførte Udtryk, og naar  $d$  i dette Udtryk sættes lig Straalehullets Diameter. Den Sikkerhed, hvormed man kan finde Overfladespændingen, vil fremgaa af følgende Oversigt over en Del af de udførte Bestemmelser.

Forsøgene i Tabel I er nærmest at betragte som orienterende. Ved Forsøgene i Tabel II blev Fejlkilderne undersøgt med Omhu, og hvad Tabel III angaar, repræsenterer de deri anførte Tal de sidste og formentlig bedste af alle udførte Bestemmelser. Som det ses, ligger alle fundne

Tabel I.

Forsøg	$d$	$C$ destilleret Vand	$C$ Vand fra Vandhanen	Anm.
Nr. 32	1,019 mm	74,8 dyn/cm	— dyn/cm	Korte cylindriske
- 30	1,220 -	74,4 —	— —	Boringer i Para-
- 33 (26)	1,591 -	75,2 —	75,3 —	fin med konisk
- 34 (25)	1,996 -	70,0 —	70,0 —	Indledning.
- 31	2,211 -	73,0 —	— —	

Middeltal 73,5 dyn/cm ved ca. 10°

Tabel II.

Forsøg	Boringens Længde	$d$	$C$ ukorrigeret	$C$ korrigeret	Anm.
Nr. 57	0,5 cm	1,616 mm	70,7 dyn/cm	70,2 dyn/cm	Rent cylindriske
- 58	0,2 -	1,567 -	77,1 —	70,1 —	Boringer i Pa-
- 59	0,1 -	1,698 -	80,3 —	72,3 —	rafin. Indre
- 60	0,4 -	1,442 -	88,5 —	72,9 —	Kant afrundet.
- 61	0,8 -	1,470 -	101,3 —	72,6 —	
- 62	0,8 -	2,490 -	96,0 —	73,9 —	
- 63	0,8 -	1,801 -	90,7 —	70,5 —	

Middeltal 71,8 dyn/cm

Korrigeret for forskellige Fejl 74,8 dyn/cm ved ca. 10°

Tabel III.

Forsøg	Hulpladens Tykkelse	$d$	$C$	Anm.
Nr. 108	0,17 mm	1,628 mm	72,8 dyn/cm	Huller pressede i
- 118	0,17 -	1,624 -	74,8 —	parafineret Papir.
- 111	0,17 -	1,878 -	74,4 —	Indre Rand af-
- 109	0,38 -	1,868 -	74,1 —	rundet.

Middeltal 74,0 dyn/cm ved 10°

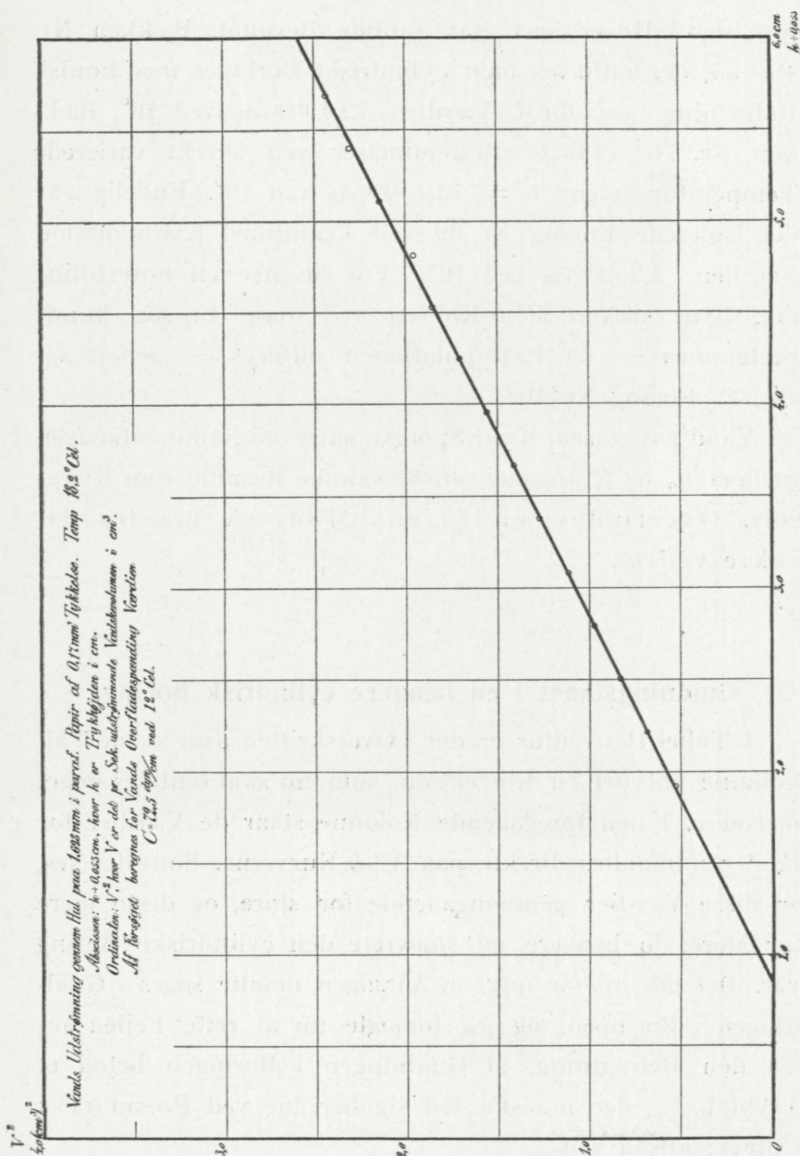


Fig. 12.

C-Værdier meget tæt ved 74,0 dyn/cm eller ved den Værdi, man sædvanligvis betragter som den rigtige for Vands Overfladespænding ved 10°. Andre Forsøgsrækker blev gennem-

ført, der i Hovedsagen gav samme Resultat. Rækken Nr. 49—55, der udførtes med cylindriske Boringer med konisk Indledning, gav for  $C$  Værdien  $72,4 \text{ dyn/cm}$  ved  $10^\circ$ , Rækken Nr. 71—74 b (8 Bestemmelser ved stærkt varierede Temperaturer) gav  $C = 73,4 \text{ dyn/cm}$  ved  $10^\circ$ . Endelig gav det isolerede Forsøg Nr. 69 ved krumliniet Extrapolation Værdien  $75,2 \text{ dyn/cm}$  ved  $10^\circ$ .<sup>1</sup> For at give en Forestilling om, hvor sikkert  $V^2$ - $h$ -Kurven ved disse Forsøg kunde bestemmes — og Extrapolationen udføres — gengives i Fig. 12 Forsøg Nr. 108.

Vand gav altsaa, hvad Spørgsmaalet om Sammenhængen mellem  $h_0$  og  $C$  angaar, ganske samme Resultat som Kvægsølv. Overfladespændingens Modtryk maales direkte ved  $h_0$ .

### Gnidningstabet i en længere cylindrisk Boring.

I Tabel II ovenfor er der i Overskriften over sidste Tal-kolonne antydnet en Korrektion, som nu skal omtales noget nærmere. I den foregaaende Kolonne staar de Værdier for  $C$ , der udmaaltes direkte paa  $V^2$ - $h$ -Kurverne. Som det ses, er disse Værdier gennemgaaende for store, og desto mere for store, jo længere og snævrere den cylindriske Boring var. Det gik op for mig, at Aarsagen maatte søges i Gnidningen i Boringen, og jeg forsøgte nu at rette Fejlen ud fra den Betragtning, at Gnidningen i Boringen betød et Tryktab  $h_p$ , der maaske lod sig beregne ved POISEUILLES Udtryk, altsaa ved

<sup>1</sup> Huller pressede i parafineret Karton gav ved Vand i Almindelighed en retliniet  $V^2$ - $h$ -Kurve. I Forsøg Nr. 69 var Kartonen temmelig tynd, og Hullets indvendige Kant har formentlig været ret skarp, saaledes at en virkelig Kontraktion har kunnet gøre sig gældende.



$$h_p = \frac{128 \cdot \eta \cdot L}{\pi d^4 g} \cdot V,$$

hvor  $\eta$  er Koefficienten for Vands indre Gnidning ved Forsøgstemperaturen,  $L$  Boringens Længde, og  $V$  det pr. Sek. udstrømmende Vædskevolumen.

Voluminet  $V$  skulde herefter være bestemt ved

$$V = \frac{\pi}{4} \kappa^2 d^2 \cdot \sqrt{2g(h - h_0 - h_p)}$$

i Stedet for ved

$$V = \frac{\pi}{4} \kappa^2 d^2 \cdot \sqrt{2g(h - h_0)}.$$

Jeg reducerede nu den faktisk fundne  $V^2$ - $h$ -Kurve til den, der skulde være kommen, saafremt  $h_p$  ikke gjorde sig gældende. Reduktionen foretoges som antydet i Fig. 13 ved

for to eller tre Punkter at beregne Værdierne for  $h_p$  og formindske Punkternes Abscisser med den beregnede  $h_p$ -Værdi. Den oprindelige  $V^2$ - $h$ -Kurve, der var meget nær retliniet eller maaske havde en Antydning af en Krumning med

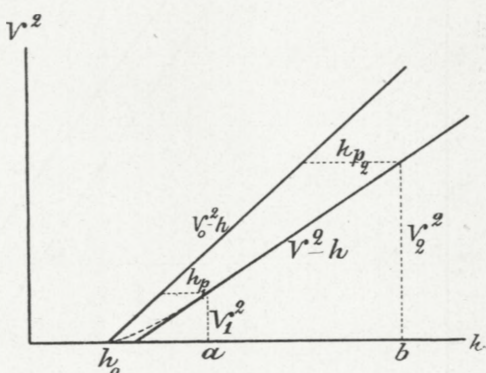


Fig. 13.

Hulheden opad, blev herved forvandlet til en ny, meget nær retliniet, men lidt stejlere,  $V^2$ - $h$ -Kurve, der forlænget retliniet afskar et Stykke  $h_0$  af Abscisseaksen givet, som det fremgaar af Tabel II, ved

$$\frac{2C}{d} = h_0 g.$$

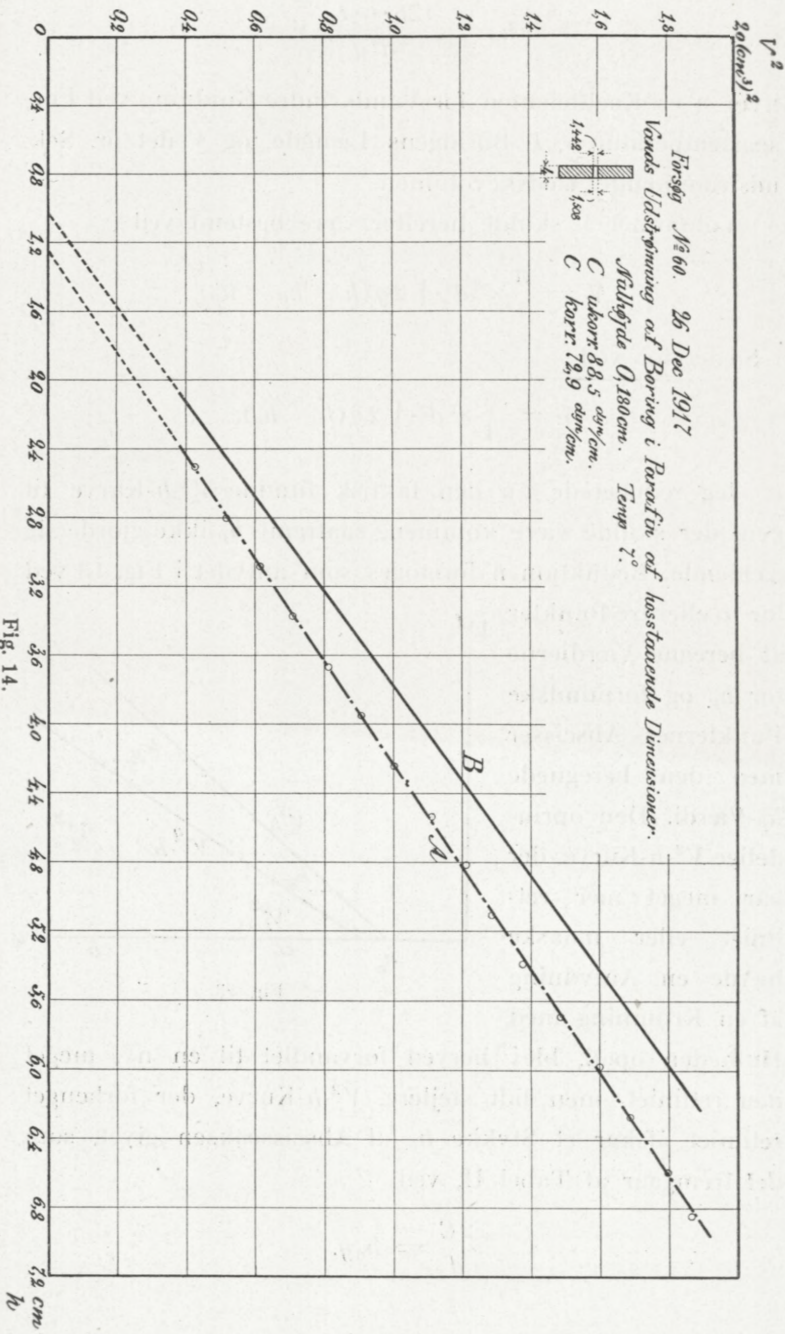


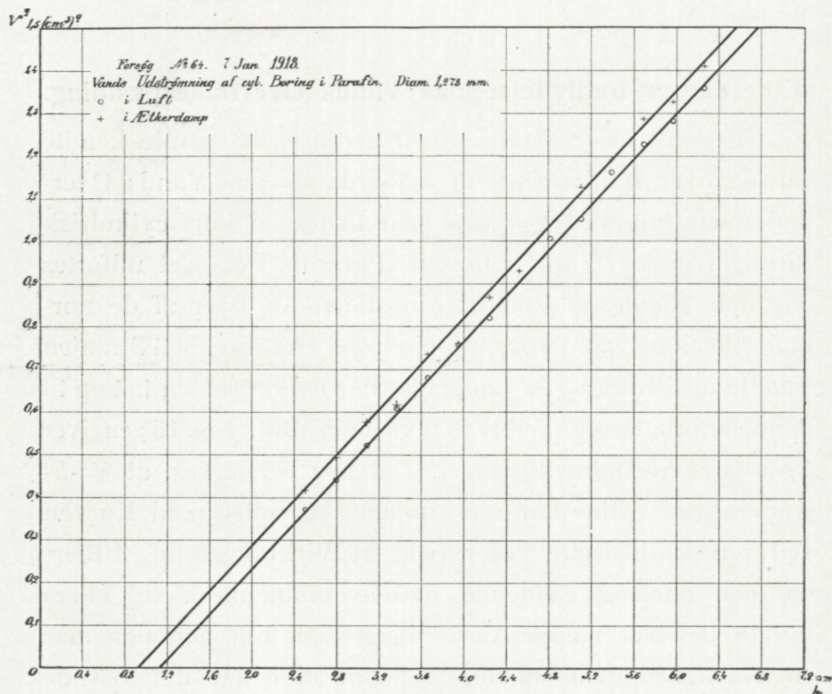
Fig. 14.

Ved Beregningen af  $h_p$  benyttedes for  $\eta$  den Værdi for den indre Gnidning, der svarer til en Parallelstrømning. For at give en Forestilling om et Forsøg, behandlet paa den her antydede Maade, gengives i Fig. 14 Bestemmelsen Nr. 60.

### **Ætherdamps Indflydelse paa Vands Overfladespænding.**

Jeg fandt det af Interesse at gentage det gamle kendte Forsøg over Indflydelsen af Ætherdamp paa Vands Overfladespænding. Ved Forsøget benyttedes en kort cylindrisk Boring paa 1,278 mm i massiv Parafin. Forsøget udførtes paa den Maade, at Udstrømningstiden for hver af de normale Portioner paa 50,2 cm<sup>3</sup> iagttoges én Gang, idet Straalen traadte ud i Luft, og én Gang, idet der over Straalen tæt op til denne anbragtes en med Æther vædet Vattot. Fig. 15 gengiver Resultatet af Dobbeltforsøget. Det bør bemærkes, at  $V^2$ - $h$ -Kurven ved Ætherdamp er nøjagtig parallel med Kurven ved ren Luft. Dette tyder paa, at Virkningen af Ætherdampen gør sig gældende næsten momentant, thi ellers kunde det vel næppe være ligegyldigt, om Straalen har en Hastighed paa 30 cm, — som den har det ved de nederste Forsøgspunkter, — eller 60 cm — som ved de øverste Punkter. Man vil iøvrigt lægge Mærke til, at Punktusikkerheden ved Ætherdamp ikke er større end ved ren Luft. Dette gør det sandsynligt, at det er den maximale Virkning af Ætherdamp, man har med at gøre, d. v. s. den, der vilde iagttages ved Udstrømning i en Atmosfære alene bestaaende af Ætherdamp. Forandringen i Overfladespænding er, som det ses, 18 0/0. Den gør sig naturligvis tydeligst gældende, naar Straalen har sin mindste Hastighed. Her er Virkningen yderst paafaldende og egner sig til Demonstration. Naar Straalen i Luft antager den tidligere

beskrevne urolige eller pulserende Karakter, ser man, at den retter sig op og samler sig til en fuldstændig glat og sammenhængende Straale. — Jeg forsøgte, om en kendelig Virkning kunde iagttages ved andre flygtige Stoffer (Ben-



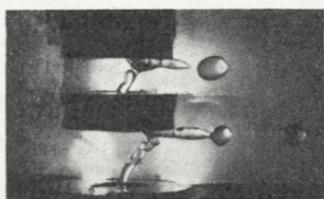
zin, Acetone, Hexan, konc. Svovlsyre, Ammoniak og Kamfer), men Resultaterne var altid negative eller i ethvert Fald uafgørende.

### Nogle iagttagelser og deres Förtolkning.

De ovenfor omtalte Forsøg har vist, at Overfladespændingen  $C$  under Udstrømning af en Vædske gennem et cirkulært Hul gør sig gældende som et Modtryk lig med det hydrostatiske Tryk  $\frac{2C}{d}$  indeni en Vædskecylinder af Straalehullets Diameter  $d$ . Ved koniske Boringer gælder

dette dog altsaa kun ved de aller laveste Hastigheder, fordi Straalen først ved disse Hastigheder antager cylindrisk Form. Ved cylindriske Boringer gælder det for alle Hastigheder, svarende til at Straalens virkelige Kontraktion permanent er Nul. Vigtigt synes det mig nu at lægge Mærke til, at det nævnte Modtryk i begge Tilfælde gør sig gældende ved de laveste Tryk. Ved disse Tryk er den største Del af Straalen nemlig meget langt fra at være cylindrisk. I Virkeligheden er kun den aller inderste Del det, f. Eks. den første hele eller halve Millimeter. Længere behøver den cylindriske Del af Straalen altsaa ikke at være, for at der i Straalens første Del skal indstille sig et Modtryk bestemt ved  $\frac{2C}{d}$ .

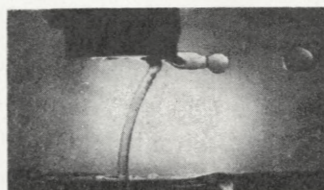
Jeg udførte et Forsøg, der yderligere belyser, hvor uafhængig det udstrømmende Volumen, altsaa det hydrostatiske Modtryk umiddelbart foran Straalehullet, er af Straalens Form blot én eller et Par Millimeter fra Straalehullet. Ved dette Forsøg ramte Straalen en Plade, og der dannedes da



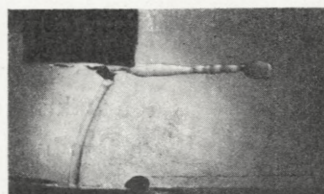
e



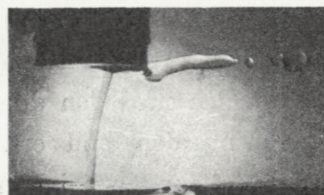
d



c



b



a

Fig. 16.

paa Straalen de kendte Ringbølger. En Række Øjebliksbilleder af disse ses i Fig. 16 a—e. Det viste sig, at Tiden for Udstrømningen af et bestemt Volumen er uafhængig af Pladens Afstand fra Straalehullet, naar Afstanden blot ikke er saa kort, at de første faa Tiendedele Millimeter af Straalen ændrer Form. Selv ved en saa deformeret Straale som den sidste af de i Fig. 16 viste, var der næppe nogen Indflydelse af Deformationen at spore.

Af de anførte Iagttagelser drager jeg den Slutning, at hvis blot Straalen er cylindrisk paa nogle faa Tiendedele Millimeter, bestaar der under denne cylindriske Overflade et Tryk bestemt ved  $\frac{2C}{d}$  (i ethvert Fald, naar  $d$  er af en Størrelsesorden paa 1—2 mm som ved de her betragtede Forsøg). Mere almindeligt drager jeg den Slutning, at det hydrostatiske Tryk inde i Straalen tro afspejler Formvariationer i Straalens Overflade, selv om disse Variationer er meget bratte. Ud fra dette Synspunkt er jeg i Stand til at forklare mig en Række andre Iagttagelser, i Særdeleshed følgende to. Hvis en iøvrigt cylindrisk Vandstraale lige netop væder Kanten af Straalehullet, danner Overfladen langs Kanten en dobbelt krummet, ringformet Flade, der vender Hulheden udad. Den hule Del af Fladen er undertiden næppe til at se, strækker sig f. Eks. kun over de første Par Tiendedele Millimeter af Straalen, og dog bevirker den straks, at det udstrømmende Volumen sættes meget kendeligt op. Grunden hertil er efter det anførte den, at den første Del af Straalen med den dobbelte Krumning, hvor ringe i Udstrækning den end er, i det væsentlige bestemmer det hydrostatiske Tryk i Munden af Straalehullet og derved det udstrømmende Vædskevolumen. Det hydrostatiske Tryk under den dobbelt krummede Overflade er givet ved

$$2C \left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right),$$

hvor  $d_1$  og  $d_2$  er Hovedkrumningsdiametrene i Overfladen. Af disse er den ene f. Eks.  $d_2$  negativ, medens den anden er af samme Størrelsesorden som Straalehullets Diameter  $d$ , omend noget større. Modtrykket maa altsaa blive mindre end ved den rent cylindriske Straale.

Den anden Iagttagelse angaar Formen af  $V^2$ - $h$ -Kurven ved koniske Boringer. Dersom man i Fig. 17, der fremstiller en saadan Kurve, betragter en begrænset Del  $c'b'$ , ses det, at Udstrømningen indenfor dette Omraade finder Sted med en effektiv Kontraktion svarende til Hældningen af Stykket  $c'b'$  og med et Modtryk givet ved  $h_0''$ , der vil være mindre end  $h_0$ , og som i visse Tilfælde vistnok endog kan blive negativ. Den lavere Værdi for

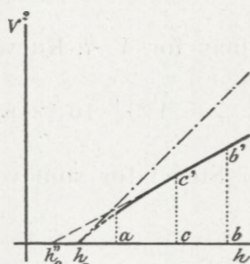


Fig. 17.

$h_0$  maa ganske sikkert igen forklares ved, at Straalen, der ved den koniske Boring og det højere Tryk udviser en virkelig Kontraktion, tæt udenfor Straalehullet har en dobbelt Krumning med én negativ Krumningsradius. Ændringen med Trykhøjden af det Stykke, Tangenten til  $V^2$ - $h$ -Kurven afskærer af  $h$ -Aksen, afspejler altsaa efter denne Forklaring, den jævne Ændring i den virkelige Kontraktion fra den konstante Værdi, denne har ved store Hastigheder, til Værdien Nul, som den har ved Hastigheden Nul.

Den virkelige  $V^2$ - $h$ -Kurve ved en cylindrisk Boring med kendelig Gnidningskrummer, som Fig. 13 skal antyde, svagt med Hulheden opad. Krumningen er ved Straalehullet som dem, vi ovenfor har betragtet, kun tydelig paa Kurvens nederste Del, for hvilken der ikke kan fremskaffes direkte Iagt-

tagelser. Det vil fremgaa af følgende Udledning. Vi har set, at en Formindskelse af alle Abscisser med de ved Poiseuilles Formel

$$h_p = \frac{128 \cdot \eta \cdot L}{\pi g d^4} \cdot V$$

beregnete Beløb reducerer den virkelige  $V^2$ - $h$ -Kurve, der tilsyneladende sigter mod  $h_0''$  af Abscisseaksen til en  $V^2$ - $h$ -Kurve, der sigter mod  $h_0$ . Indføres  $h_p$  i Torricellis Udtryk for Udstrømningshastigheden, saaledes at dette bliver

$$v = \alpha_f^2 \sqrt{2g(h - h_0 - h_p)},$$

faas for  $V^2$ - $h$ -Kurven Ligningen:

$$V^2 + 16\pi\alpha^4\eta L \cdot \sqrt{V^2} = \left(\frac{\pi}{4}d^2\right)^2 \cdot \alpha^4 \cdot 2g(h - h_0)$$

i Stedet for som ved den tidligere meddelte simple Teori

$$V_0^2 = \left(\frac{\pi}{4}d^2\right)^2 \cdot \alpha^4 \cdot 2g(h - h_0).$$

Ved Korrektionen reduceres den virkelige  $V^2$ - $h$ -Kurve til en Kurve med den sidste Ligning.

Betragter vi nu de to sidste Udtryk, ses det, at Indflydelsen af Tryktabet er den, der er søgt anskueliggjort i Fig. 13. Den faktiske og den reducerede Kurve gaar begge gennem Punktet  $h_0, 0$ , men medens den reducerede  $V_0^2$ - $h$ -Kurve skærer Abscisseaksen i dette Punkt, tangerer den faktiske  $V^2$ - $h$ -Kurve Aksen. Den sidste Kurve vil krumme som antydet, men Krumningen vil snart blive meget ringe. Hvorledes Talforholdene iøvrigt kan stille sig, vil fremgaa af efterfølgende Tabel over  $\frac{V_0^2 - V^2}{V^2}$  og  $\frac{d^2 V^2 / dV^2}{dh^2 / dh}$ . Ved Tabellens Beregning er  $\alpha$  sat lig 1 og  $\eta$  lig 0,01. (Vand ved c. 20°). Endvidere er  $\frac{L}{d^2}$  sat lig 20. Tabellen belyser altsaa alle de Tilfælde, der giver  $\frac{L}{d^2}$  denne Værdi, f. Eks.



$$d = 0,4 \quad L = 3,0$$

$$d = 0,2 \quad L = 0,8$$

$$d = 0,1 \quad L = 0,2$$

O. S. V.

$h - h_0$	$\frac{V_0^2 - V^2}{V^2}$	$\frac{d^2 V^2}{dh^2} / \frac{dV^2}{dh}$
1 cm	0,288	0,0720
2 -	0,204	0,0255
4 -	0,144	0,0045
10 -	0,091	0,0023

Tabellen viser navnlig, hvor overordentlig lidt  $V^2$ - $h$ -Kurven maa ventes at ville krumme, hvis  $V_0^2$ - $h$ -Kurven er retliniet. Indenfor det Interval, hvor Forsøg kan udføres —  $ab$  i Fig. 13 — vil Krumningen meget let kunne undrage sig Opmærksomheden. Extrapolerer man nu retliniet til Skæringen med Abscisseaksen, ses det, at denne Extrapolation maa give en falsk — og for stor — Værdi for  $h_0$ .

Det er givet, at man maa tilskrive Gnidningen i Straalehullet Skylden for en Del af den tilsyneladende Kontraktion, d. v. s. den Del at den effektive Kontraktion, der ikke afspejler en virkelig Sammentrækning af Straalen. Vi har nu set, at Gnidningen tillige har den Virkning at nedsætte den virksomme Trykhøjde med et Beløb, som man ved mindre Hastigheder kan gøre fuldstændig Rede for gennem Poiseuilles Udtryk. I den reducerede  $V^2$ - $h$ -Kurve<sup>1</sup> er Indflydelsen paa Trykhøjden elimineret, men Gnidningens Bidrag til den effektive Kontraktion er paa langt nær ikke udskilt. Det fremgaar med stor Tydelighed af de nedenfor anførte Iagttagelser over den effektive Kontraktion for Vandstraaler ved en Række Boringer i Paraffin.

Forsøg	Boringens Diameter	Boringens Længde	Effektiv Diameterkontraktion	
			ukorrigeret	korrigeret
Nr. 57	1,648 mm	0,5 mm	6,7 %	6,5 %
- 58	1,567 -	2,0 -	4,5 -	3,7 -
- 59	1,677 -	1,0 -	6,4 -	6,2 -
- 60	1,475 -	4,0 -	10,4 -	8,6 -
- 61	1,535 -	8,0 -	15,4 -	12,6 -
- 62	1,409 -	8,0 -	15,0 -	14,8 -
- 63	1,993 -	8,0 -	9,7 -	8,2 -

Den effektive Kontraktions Variation med Længden gør sig, som det vil ses, omtrent lige saa stærkt gældende efter som før Korrektionen.

Det er ikke uden Interesse at lægge Mærke til, at medens man ved Bestemmelse af Vædskers indre Gnidning paa Grundlag af Poiseuilles Formel bruger Torricellis Udtryk til at korrigere Udstrømningstrykket for den Del, der bliver omsat i levende Kraft, benytter man ved den nu angivne Metode til Bestemmelse af Overfladespænding — hvilken Metode er grundet paa Torricellis Udstrømningslov — Poiseuilles Udtryk til at rette Trykhøjden for den Del, der medgaar til Overvindelse af den indre Gnidning.

Det foreliggende Arbejde er udført med Støtte fra Carlsbergfondet, hvis Bestyrelse jeg herved bringer min bedste Tak.